

 SESSION 2026

Baccalauréat de l'Enseignement Général — Série S

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures — Coefficient : 6

Les exercices et les problèmes sont obligatoires.

Exercice 1

3 points

I. Considérons les matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le déterminant de la matrice A . Conclure. (0,5 pt)
 (b) Vérifier que $2A - A^2 = I_3$. En déduire la matrice P tel que $A \times P = I_3$. (0,5 pt)
2. On pose $D = ABP$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que $D^n = AB^n P$. (0,5 pt)

II. Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres : A ; A ; A, B, B, B, B, C, C.

1. Une épreuve (E) consiste à tirer au hasard une boule de l'urne. On note $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ la probabilité d'obtenir respectivement la lettre A, B, C.
 Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$. (0,5 pt)
2. On répète cinq fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve (E).
 (a) Calculer la probabilité de l'événement :
 F : « la lettre B apparaît exactement deux fois » (0,5 pt)
 (b) Soit X la variable aléatoire qui détermine le nombre d'apparition de la lettre B à l'issue de cinq épreuves.
 Calculer $P(X \geq 1)$. (0,5 pt)

Exercice 2

2 points

Dans un espace (E) orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un plan (P) contenant le point $A(1; -2; 2)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(-1; 2; 1)$ et $\vec{v}(-4; 2; -2)$.

1. Montrer que (P) a pour équation cartésienne

$$(P) : x + y - z + 3 = 0$$

(0,5 pt)

2. Soit (D) une droite de (E) définie par son équation paramétrique

$$(D) : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = 2t - 5 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Vérifier que (P) et (D) sont perpendiculaires. (0,5 pt)
 (b) Déterminer les coordonnées du point F intersection de (P) et (D) . (0,5 pt)
 3. Soit (D') une droite passant par $A(1; -2; 2)$ et perpendiculaire à (D) .
 Déterminer la distance minimale qui sépare la droite (D) et la droite (D') . (0,5 pt)

Problème 1

7 points

Dans un plan (P) orienté, on considère un triangle ABC direct et rectangle en A tel que $AC = 4\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$. O étant le milieu du segment $[AC]$ et D celui de $[BC]$.

On désigne par :

- S la similitude plane directe qui transforme A en B et O en D .
- R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- R_A la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
- (L) la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AD) .

On pose : $g = R_C \circ R_A$ et $f = S \circ R_A$.

I.

1. (a) Prouver que CAD est un triangle équilatéral. (0,5 pt)
 (b) Déterminer les éléments caractéristiques de S . (0,5 pt)
 2. En décomposant R_C et R_A en deux symétries orthogonales convenablement choisies, identifier g . (0,5 pt)
 3. (a) Montrer que f est une homothétie de rapport k que l'on déterminera. (0,5 pt)
 (b) Déterminer $f(A)$. En déduire que le centre Ω de f est le barycentre du système $\{(A, 2); (B, -1)\}$. (0,5 pt)

4. (a) Déterminer et construire le point G barycentre du système

$$\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}.$$

(0,25 pt)

- (b) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan (P) qui vérifie :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16.$$

(0,5 pt)

II. Le plan (P) est muni d'un repère complexe orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{OC}$.

1. (a) Montre que l'affixe du point D est $z_D = 2\sqrt{3}$. (0,5 pt)
- (b) En utilisant $S(A) = B$ et $S(O) = D$. Déterminer l'expression complexe de S . En déduire ses éléments caractéristiques. (0,5 pt)
2. (a) Déterminer l'expression complexe de R_C , R_A et g . (0,5 pt)
- (b) En déduire l'élément caractéristique de g . (0,75 pt)
3. (a) Déterminer l'expression complexe de f . (0,25 pt)
- (b) En déduire sa nature et ses éléments caractéristiques. (0,5 pt)
4. Soit $\bar{S}$ la transformation qui a pour expression complexe

$$z' = (1 - i)\bar{z} + 2 + 4i.$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\bar{S}$. (0,75 pt)

Problème 2

8 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x + 1)^n e^{-x}$. On note $(\mathcal{C}_n)$ ses courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie A

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition selon la parité de n . (0,5 pt)
2. Calculer $f'_n(x)$ dérivée de $f_n(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f_n selon la parité de n . (0,5 pt)
3. (a) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes indépendants de n que l'on précisera les coordonnées. (1 pt)
- (b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$. (0,5 pt)

(c) Tracer $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère.

(1 pt)

Partie B

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : 2y'' - 3y' + y = (ax + b)e^{-x}; \quad (E_2) : 2y'' - 3y' + y = 0 \quad \text{où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer les réels a et b pour que $f_1(x) = (x + 1)e^{-x}$ est une solution de (E_1) dans $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $f_1 + g$ est solution de (E_1) si et seulement si g est solution de (E_2) . (0,5 pt)
 - (b) En déduire la solution générale de (E_1) dans $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

Partie C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (I_n) est une suite numérique définie par :

$$I_n = \int_{-1}^0 (x + 1)^n e^{-x} dx.$$

1. Calculer I_1 . Interpréter graphiquement ce résultat. (0,75 pt)
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la variation de la suite (I_n) , puis en déduire que (I_n) est convergente. (1 pt)
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $-1 < x < 0$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

(0,75 pt)

- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(0,25 pt)